Teoria ergodyczna
WPPT Matematyka, IIIr. semestr zimowy 2008/9
Wykład 6

5/12/08

Drapacz chmur i odwzororwanie indukowane

Rozważamy układ dynamiczny $(X, \mathcal{F}, \mu, T)$ z miarą probabilistyczną i odwzorowaniem zachowującym miarę (nie koniecznie odwracalnym). Ustalmy dowolny zbiór mierzalny $A \subset X$ o mierze nietrywialnej (czyli z przedziału $(0,1)$).

Definicja: *(Odwróconym) drapaczem chmur* nad A nazywamy rozłączny ciąg zbiorów zbudowany następująco:

$$
\begin{aligned}
A_0 &= A \\
A_1 &= T^{-1}(A) \setminus A_0 \\
&\vdots \\
A_n &= T^{-n}(A) \setminus (A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Wreszcie definiujemy

$$S = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \quad \text{(jak ,,Skyscraper'')}$$

Widać z definicji, że ,,piętra'' A_n są rozłączne. Sprawdźmy, że suma pięter jest niezmiennicza. Po pierwsze zauważmy, że dla każdego $n \geq 1$

$$T^{-n}(A) \subset A_n \cup (A_0 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \subset S.$$

Oczywiście $T^{-1}(T^{-n}(A)) = T^{-n-1}(A)$, zatem

$$T^{-1}(S) = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-1}(A_n) \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-1}(T^{-n}(A)) \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n-1}(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A) \subset S.$$

Pokazaliśmy niezmienniczość S. Jak wiemy, wynika z niej również, że $T(S) = S$, w szczególności, $T(A) \subset S$ (z dokładnością do miary zero). Zauważmy, że jest to inny dowód twierdzenia Poincaré: obraz $T(x)$ (prawie) każdego punktu x z A należy do jakiegoś piętra A_n zawartego w $T^{-n}(A)$. Czyli $\exists_{n \geq 0}\, T^{n+1}(x) \in A$ (gdzie $n+1 > 0$).

Poniższy rysunek ilustruje drapacz chmur i odwzorowanie na nim działające.

$$\begin{array}{l}
\vdots \\
\downarrow \\
\cdots \\
\downarrow \\
\cdots - A_4 \\
\downarrow \\
\cdots - - A_3 \\
\downarrow \\
\cdots - - - A_2 \\
\downarrow \\
\cdots - - - - A_1 \\
\downarrow \\
\cdots - - - - - A_0
\end{array}$$

Z A_0 punkty wędrują do wyższych pięter. Nie jest powiedziane których i w jakich proporcjach, ale istotne jest, że nie idą poza wieżę.

Uwaga. W większości książek jest to zrobione dla odwzorowań odwracalnych, i strzałki idą w górę (czyli nasz rysunek odpowiada wtedy działaniu T^{-1}). Jednak przy odwzorowaniach nieodwracalnych i strzałkach w górę nie ma gwarancji, że piętra są mierzalne.

Zadanie 1: Wykaż, że $T^{-1}(A_n) \subset A_{n+1} \cup A_0$.

Wiemy już (Tw. Poincaré), że dla każdego $x \in A$ istnieje najmniejsze $n = n_x > 0$ takie, że $T^n(x) \in A$.

Zadanie 2: $n_x = n$ wtedy i tylko wtedy gdy $T(x) \in A_{n-1}$.

Definicja: Określmy *odwzorowanie indukowane* $T_A : A \to A$ wzorem

$$T_A(x) = T^{n_x}(x).$$

Pokażemy, że jest to odwzorowanie mierzalne i zachowuje miarę warunkową na A, $\mu_A = \mu(\cdot|A)$. Dla każdego $n > 0$ rozważmy zbiór $C_n = \{x \in A : n_x = n\}$. Mamy

$$C_n = T^{-1}(A_{n-1}) \cap A.$$

Czyli jest to zbiór mierzalny. A jest sumą rozłączną zbiorów C_n (po $n > 0$). Weźmy teraz dowolny zbiór mierzalny $B \subset A$. Ponieważ $T_A : A \to A$, więc

$$T_A^{-1}(B) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(T_A^{-1}(B) \cap C_n\right).$$

Zauważmy, że $T_A^{-1}(B) \cap C_n = T^{-n}(B) \cap C_n$, bo na C_n jest $T^n = T_A$, więc należenie do obu zbiorów zadane jest warunkami $y \in C_n$ & $T^n(y)(= T_A(y)) \in B$. Zatem

$$(*) \qquad T_A^{-1}(B) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(T^{-n}(B) \cap C_n\right),$$

a to jest zbiór mierzalny. Musimy jeszcze obliczyć miarę tego zbioru. Zanim to zrobimy, zauważmy następujący fakt:

$$\forall_{n,k>0} \forall_{0<j<n} \ \ C_n \text{ jest rozłączny z } T^{-j}(C_k).$$

Wynika to natychmiast z obserwacji, że punkty zbioru C_n wpadają do A dopiero po n krokach (a więc po j krokach nie mogą wpadać do C_k).
Wracamy do obliczania miary $T_A^{-1}(B)$. Mamy:

$$\mu(B) = \mu(T^{-1}(B)) = \mu(T^{-1}(B) \cap C_1) + \mu(T^{-1}(B) \setminus C_1)).$$

Dalej,

$$\begin{aligned}
&\mu(T^{-1}(B) \setminus C_1) = \mu(T^{-1}(T^{-1}(B) \setminus C_1)) = \\
&\qquad \mu((T^{-2}(B) \setminus T^{-1}(C_1)) \cap C_2) + \mu(T^{-2}(B) \setminus (C_2 \cup T^{-1}(C_1))) = \\
&\qquad\qquad \mu(T^{-2}(B) \cap C_2) + \mu(T^{-2}(B) \setminus (C_2 \cup T^{-1}(C_1)))
\end{aligned}$$

(korzystamy z rozłączności C_2 i $T^{-1}(C_1)$, dlatego w pierwszym wyrażeniu w ostatniej linii nie musimy odejmować $T^{-1}(C_1)$). Czyli,

$$\begin{aligned}
\mu(B) = \mu(T^{-1}(B) \cap C_1) + \mu(T^{-2}(B) \cap C_2) + \\
\mu(T^{-2}(B) \setminus (C_2 \cup T^{-1}(C_1))).
\end{aligned}$$

Analogicznie

$$\mu(T^{-2}(B) \setminus (C_2 \cup T^{-1}(C_1))) = \mu(T^{-3}(B) \cap C_3) + \mu(T^{-3}(B) \setminus (C_3 \cup T^{-1}(C_2) \cup T^{-2}(C_1)))$$

stąd

$$\begin{aligned}
\mu(B) = \mu(T^{-1}(B) \cap C_1) + \mu(T^{-2}(B) \cap C_2) + \mu(T^{-3}(B) \cap C_3) + \\
\mu(T^{-3}(B) \setminus (C_3 \cup T^{-1}(C_2) \cup T^{-2}(C_1))).
\end{aligned}$$

Przez oczywistą indukcję i z ciągłości miary, a na końcu stosując wzór (*) dostaniemy

$$\mu(B) \le \mu(T^{-1}(B) \cap C_1) + \mu(T^{-2}(B) \cap C_2) + \mu(T^{-3}(B) \cap C_3) + \cdots = \mu(T_A^{-1}(B)).$$

Otrzymaliśmy, że T_A NIE ZMNIEJSZA miary przez przeciwobraz (dla podzbiorów zbioru A). Stosując to do dopełnienia $A \setminus B$ (i ponieważ przeciwobrazy zbiorów rozłącznych są rozłączne) dostajemy, że również jej NIE ZWIĘKSZA, czyli zachowywanie miary. Zatem T_A zachowuję miarę μ (obciętą do podzbiorów A), a po unormowaniu – miarę warunkową.

UWAGA: Jeśli układ jest ergodyczny, to $S = X$ (z dokładnością do miary zero).